آزمون جامع (۱)

۱. گزینهٔ «۲»

اگر معادلهٔ خواسته شده را با $Ax^2+Bx+C=0$ نمایش دهیم، می‌خواهیم ریشه‌های این معادله به‌صورت زیر باشد:

$$X=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow X+1=\frac{1}{2}x\Rightarrow x=2(X+1)=2X+2$$

حال در معادلهٔ داده‌شده به جای x، قرار می‌دهیم: $2X+2$

$$x^2+4x-1=0\xrightarrow{x=2X+2}(2X+2)^2+4(2X+2)-1=0\Rightarrow$$

$$4X^2+8X+4+8X+8-1=0\Rightarrow 4X^2+16X+11=0$$

۲. گزینهٔ «۲»

در معادله‌ی $x^2-3x-1=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-1$$

حال اگر ریشه‌های معادلهٔ $25x^2-5kx-1=0$ را با x_1 و x_2 نمایش دهیم داریم:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\beta}{3S+4P}=\dfrac{\beta}{3\times3+4\times(-1)}=\dfrac{\beta}{5}\\ x_2=\dfrac{\alpha}{2S+P}=\dfrac{\alpha}{2\times3+(-1)}=\dfrac{\alpha}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{\beta}{5}+\frac{\alpha}{5}=\frac{\alpha+\beta}{5}=\frac{3}{5}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله‌ی $25x^2-5kx-1=0$ برابر $\frac{3}{5}$ است. بنابراین در این معادله داریم:

$$x_1+x_2=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{5k}{25}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow k=3$$

۳. گزینهٔ «۲»

در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$x'x''=\frac{c}{a}\Rightarrow x'x''=\frac{3}{4}$$

از طرفی داریم $x'-3x''=0$، پس:

$$\begin{cases}x'x''=\dfrac{3}{4}\\ x'=3x''\end{cases}\Rightarrow(3x'')(x'')=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$(x'')^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{x''<0}x''=-\frac{1}{2}$$

این ریشه در معادله صدق می‌کند، پس:

$$4(-\frac{1}{2})^2-(m+1)(-\frac{1}{2})+3=0\Rightarrow 4\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(m+1)+3=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(m+1)=-4\Rightarrow m+1=-8\Rightarrow m=-9$$

۴. گزینهٔ «۲»

با انتخاب $t=x^2+x+1$ داریم:

$$t^2+3t-4=0\Rightarrow(t-1)(t+4)=0\Rightarrow t=1,-4$$

$$\begin{cases}x^2+x+1=-4\Rightarrow x^2+x+5=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه ندارد}\\ x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0,-1\end{cases}$$

۵. گزینهٔ «۲»

چون ضرایب معادلهٔ درجه دو گویا است و یکی از ریشه‌ها $3-\sqrt{5}$ است، در نتیجه ریشهٔ دیگری $3+\sqrt{5}$ است، پس:

$$\begin{cases}x_1+x_2=S=6\\ x_1x_2=P=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=9-5=4\end{cases}$$

حال کافی است S و P را در معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ قرار دهیم:

$$x^2-6x+4=0$$

۶. گزینهٔ «۲»

باید ابتدا معادله را مرتب نموده و سپس دلتا را کوچک‌تر از صفر قرار دهیم:

$$k(x^2+5x+4)=x\Rightarrow kx^2+5kx+4k=x\Rightarrow$$

$$kx^2+5kx-x+4k=0$$

$$kx^2+(5k-1)x+4k=0\Rightarrow\Delta=(5k-1)^2-4(4k)(k)<0$$

$$(25k^2-10k+1)-16k^2<0\Rightarrow 9k^2-10k+1<0$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}\frac{1}{9}<k<1$$

۷. گزینهٔ «۱»

$$x_1-x_2=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{9-4\times2\times m}}{\cancel{2}}=\frac{5}{\cancel{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}9-8m=25\Rightarrow 8m=-16\Rightarrow m=-2$$

۸. گزینهٔ «۲»

با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow-\frac{b}{c}=\frac{7}{3}\Rightarrow-\frac{2k-1}{-k}=\frac{7}{3}\Rightarrow 3(2k-1)=7k$$

$$\Rightarrow 6k-3=7k\Rightarrow k=-3$$

۹. گزینهٔ «۱»

معادلهٔ خواسته‌شده را $X^2-S'X+P'=0$ در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم: $X=x^3$ (x ریشهٔ معادلهٔ داده‌شده است.)

$$\begin{cases}S'=X_1+X_2=x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=\\ P'=X_1X_2=x_1^3x_2^3=P^3\end{cases}$$

در معادلهٔ $x^2+x-1=0$ داریم:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-1\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S'=(-1)^3-3(-1)(-1)=-4\\ P'=(-1)^3=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow X^2-(-4)X+(-1)=0\Rightarrow X^2+4X-1=0$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

در معادلهٔ داده‌شده مشاهده می‌کنیم که $\frac{c}{a}=\frac{-1}{m^2}<0$ است، پس نمودار این تابع از هر ۴ ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و محور xها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند، زیرا در معادلهٔ درجهٔ دو اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت است.

آزمون جامع (۲)

۱. گزینهٔ «۴»

در معادلهٔ درجه دو داریم:

$$x^2-3x+1=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1\end{cases}$$

از آنجایی که $\alpha\beta=1$ است نتیجه می‌گیریم که β,α معکوس یکدیگرند، یعنی:

$$\alpha\beta=1\Rightarrow\begin{cases}\beta=\frac{1}{\alpha}\\ \alpha=\frac{1}{\beta}\end{cases}(*)$$

حال با توجه به رابطه‌های بالا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(\alpha+\frac{1}{\beta})^3+(\beta+\frac{1}{\alpha})^3\overset{(*)}{=}(\alpha+\alpha)^3+(\beta+\beta)^3=(2\alpha)^3+(2\beta)^3$$

$$=8\alpha^3+8\beta^3=8(\alpha^3+\beta^3)=8(S^3-3PS)=8(3^3-3\times1\times3)$$

$$=8(27-9)=8\times18=144$$

۲. گزینهٔ «۳»

اصلاحیه: به اشتباه در پاسخنامه گزینهٔ «۱» خورده.

می‌دانیم که در تابع درجهٔ دو، خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن تابع است پس در تابع داده‌شده داریم:

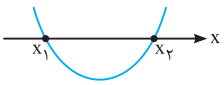
$$x=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x=\frac{-4}{2\times1}=-2$$

این خط یعنی $x=-2$ تابع را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع کرده است، یعنی نقطه $(-2,-2)$ در تابع صدق می کند، پس:

$$-2=(-2)^2+4(-2)+k\Rightarrow-2=4-8+k\Rightarrow k=2$$

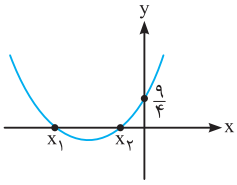
در مسأله از ما خواسته‌شده است که طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند چقدر است که در حقیقت همان فاصلهٔ بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4x+2=0$ است یعنی همان $|x_2-x_1|$ که برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ می‌باشد:

$$|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{16-4\times1\times2}}{1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$



۳. گزینهٔ «۴»

از آنجایی که در تابع داده‌شده به ازای $x=0$ داریم: $f(0)=\frac{9}{4}$ پس نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، لذا با توجه به مفروضات مسأله، شکل تابع باید به‌صورت زیر باشد:



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ: $ax^2-(a-4)x+\frac{9}{4}=0$ باید دو ریشهٔ منفی داشته باشد. از طرفی می‌دانیم شرط آن‌که معادلهٔ درجهٔ دو دارای دو ریشهٔ منفی باشد آن است که:

$$\Delta>0,P>0,S<0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(a-4)^2-4a\times\frac{9}{4}=a^2-8a+16-9a=$$

$$a^2-17a+16>0$$

$$(a-1)(a-16)>0\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}\alpha<1\text{ یا }a>16\ (1)$$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{\frac{9}{4}}{a}>0\Rightarrow a>0\ (2)$$

$$S=-\frac{b}{a}<0\Rightarrow\frac{a-4}{a}<0\xrightarrow{\text{جدول}}0<a<4\ (3)$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳) داریم: $0<a<1$

۴. گزینهٔ «۱»

اگر ریشه‌های معادلهٔ جدید را با X و ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده را با x نمایش دهیم داریم:

$$X=x-2\Rightarrow x=X+2$$

حال در معادلهٔ داده‌شده به جای x قرار می‌دهیم $X+2$:

$$(X+2)^2+(X+2)-1=0\Rightarrow X^2+4X+4+X+2-1=0$$

$$\Rightarrow X^2+5X+5=0$$

۵. گزینهٔ «۱»

$$x^3+5x^2-x=0\Rightarrow x(x^2+5x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0=\alpha\\ x^2+5x-1=0\xrightarrow{\text{حل}}\beta,\gamma\end{cases}$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2+5x-1=0$ را β و γ بنامیم داریم:

$$\beta^2+\gamma^2=S^2-2P=(-5)^2-2(-1)=25+2=27$$

$$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0+27=27$$

۶. گزینهٔ «۲»

چون در سؤال گفته شده است که تابع دارای ماکزیمم است باید ضریب x^2 منفی باشد، پس: $a<0$

از طرفی مقدار ماکزیمم تابع یعنی $-\frac{\Delta}{4a}$ باید برابر ۴ باشد، پس:

$$f(x)=ax^2+(a+5)x\Rightarrow\Delta=(a+5)^2-4\times a\times0=(a+5)^2$$

$$\Rightarrow\frac{-\Delta}{4a}=4\Rightarrow\frac{-(a+5)^2}{4\times a}=4\Rightarrow(a+5)^2=-16a$$

$$\Rightarrow a^2+10a+25=-16a\Rightarrow a^2+26a+25=0$$

$$\Rightarrow(a+1)(a+25)=0\Rightarrow a=-1,-25$$

۷. گزینهٔ «۱»

در معادلهٔ داده شده داریم:

$$2x^2-3x-1=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\log_4^A+\log_4^B=\frac{-(-3)}{2}\Rightarrow\log_4^{AB}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow AB=(4)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow AB=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$$

۸. گزینهٔ «۴»

باید دلتای معادله مثبت باشد، یعنی:

$$\Delta = ۱۶ - ۴(m+۲)(m-۱) > ۰ \xrightarrow{\div(-۴)} (m+۲)(m-۱) - ۴ < ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ + m - ۲ - ۴ < ۰ \Rightarrow m^۲ + m - ۶ < ۰ \Rightarrow (m-۲)(m+۳) < ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -۳ < m < ۲$$

۹. گزینهٔ «۱»

در معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \alpha\beta = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{\beta}, \beta = \frac{۱}{\alpha}$$

بنابراین عبارت داده‌شده را با توجه به روابط بالا ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(\alpha + \frac{۱}{\beta})^۲ + (\beta + \frac{۱}{\alpha})^۲ = (\alpha + \alpha)^۲ + (\beta + \beta)^۲$$

$$= ۴\alpha^۲ + ۴\beta^۲ = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲)$$

$$= ۴(S^۲ - ۲P) = ۴(۴^۲ - ۲ \times ۱) = ۴(۱۶ - ۲) = ۴ \times ۱۴ = ۵۶$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

شرط داشتن دو ریشهٔ مختلف‌العلامت در معادلهٔ درجهٔ ۲ این است که $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، پس:

$$\frac{c}{a} = \frac{m-۳}{m-۱} < ۰ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} ۱ < m < ۳$$